Prof. Dr. Patrick Dondl
Dr. Martin Jesenko

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Angewandte Mathematik

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2019

Übungsblatt 5

Das Hauptthema dieses Blattes ist die Determinante. Dadurch kann man Volumina der Parallelotope ausrechnen, wie wir bereits auf dem letzten Blatt für Dimension 2 gezeigt haben. Sie liefert ein einfaches Kriterium für Invertierbarkeit. Infolgedessen sind die Spalten einer quadratischen Matrix linear unabhängig und bilden somit eine Basis genau dann, wenn Determinante dieser Matrix nicht 0 ist. Die inverse Matrix steht im Zusammenhang mit der Kofaktormatrix und für lineare Gleichungssysteme gibt es (falls die Koeffizientenmatrix invertierbar ist) die Cramer'sche Regel.

Präsenzaufgaben

Diese Aufgaben sind nicht abzugeben und werden am 31. Mai in den Übungen besprochen.

1. Zeigen Sie für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

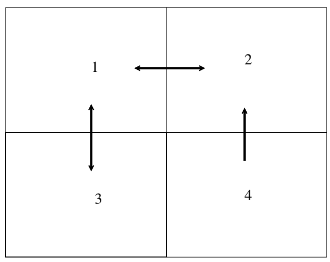
2. Finden Sie $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B.$$

Hausaufgaben

Die Hausaufgaben sind zu zweit in den richtigen Briefkasten zu „Mathematik II für Ingenieure“ (Erdgeschoss, Gebäude 051) abzugeben. Die Abgabefrist ist Dienstag, der 4. Juni 2019, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert und werden in den Übungsgruppen besprochen.

1. Bei einer Versuchsreihe wird das Verhalten der Mäuse untersucht. Sie befinden sich in den Räumen 1, 2, 3 und 4 und können in den abgebildeten Richtungen ihren Standort ändern. (Zum Beispiel ist der Durchgang vom Raum 4 nach Raum 2 möglich, umgekehrt allerdings nicht.) Die Anzahl der Mäuse in den Räumen wird je Minute protokolliert. Man stellt fest, dass die Hälfte der Mäuse im Raum verbleibt. Die anderen wandern, ohne einen Durchgang zu bevorzugen, einen Raum weiter.



(a) Es sei x_i die Anzahl der Mäuse im i-ten Raum in einem Moment und y_i nach einer Minute. Schreiben Sie y_1, y_2, y_3, y_4 als Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4.

(b) Zeigen Sie, dass wenn man die Anzahlen als Vektoren schreibt, also

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{y}$ linear. Bestimmen Sie ihre Darstellungsmatrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(c) Zu einem Zeitpunkt befinden sich 40 Mäuse im Raum 1, 20 Mäuse im Raum 2, 84 Mäuse im Raum 3 und 100 Mäuse im Raum 4. Wie verteilen sich die Mäuse nach zwei Minuten? Wie kann die Verteilung eine Minute vorher ausgesehen haben?

(d) Bestimmen Sie einen Gleichgewichtszustand, d. h. ein $\tilde{\boldsymbol{x}}$ mit $A\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}$, wenn es insgesamt 200 Mäuse gibt. Berechnen Sie eine Basis von $\ker(A - E_4)$.

2. Berechnen Sie die folgenden Determinanten:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & -8 & 0 \\ -4 & 7 & 9 & -10 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 2 & 11 & \frac{1}{2} & -4 & 2 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 9 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Inverse von A durch die Kofaktormatrix.

(b) Lösen Sie das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.